Teoretická část - 25.1.2021

1. (a) Definujte monotónní funkci a lokální extrém (2 body).

   (b) Zformulujte větu o nutné podmínce pro lokální extrém a větu o vztahu monotónie a derivace (2 body).

   (c) Větu o nutné podmínce pro lokální extrém dokažte (1 bod).

   (d) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má vlastní derivaci na $\mathbb{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

      (i) je-li f rostoucí na $\mathbb{R}$, potom $f' > 0$ na $\mathbb{R}$,

      (ii) je-li f nerostoucí na $\mathbb{R}$, potom $f' \leq 0$ na $\mathbb{R}$,

      (iii) je-li f rostoucí na okolí bodu 9, potom f nemá v bodě 9 lokální extrém,

      (iv) je-li f nerostoucí na okolí bodu 9, potom f nemá v bodě 9 lokální extrém.

   Vše řádně zdůvodněte (3 body).

2. (a) Definujte pojmy $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$ a $f(x) = O(g(x))$, $x \to a$ (2 body).

   (b) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité na $\mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

   (i) je-li $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$, potom $f(x) = O(g(x))$, $x \to a$,

   (ii) je-li $f(x) = O(g(x))$, $x \to a$, potom $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$,

   (iii) je-li $f(x) = O(g(x))$, $x \to a$, potom $f(x) + g(x) = O(g(x))$, $x \to a$,

   (iv) je-li $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$, potom $f(x) + g(x) = o(g(x))$, $x \to a$,

   (v) je-li $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$, potom $f(x)^2 = o(g(x))$, $x \to a$,

   (vi) je-li $f(x) = O(g(x))$, $x \to a$, potom $f(x)^2 = O(g(x))$, $x \to a$,

   (vii) je-li $f(0) = g(0) = 0$, potom $f(x) = O(g(x))$, $x \to 0$,

   (viii) je-li $f(-7) = g(-7) = -7$, potom $f(x) = O(g(x))$, $x \to -7$.

   Vše řádně zdůvodněte (6 bodů).

3. (a) Definujte neurčitý integrál a popište jeho tvar $(1,5$ bodu).
   (b) Zformulujte větu o per partes pro neurčtý integrál, 1. větu o substituci pro neurčitý integrál a 2. větu o substituci pro neurčitý integrál (3 body).
   (c) Dokažte 2. větu o substituci pro neurčitý integrál (2 body).
   (d) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je dána předpisem

$$f(x) = 2 + \sin^{366} x + \cos^{366} x$$

   a F a G jsou primitivní funkce k f na $\mathbb{R}$. Pro která $x \in \mathbb{R}$ platí rovnice

$$\frac{\sin^{366}(F(x) - F(1))}{\sin^{366}(G(x) - G(1))} + \frac{\cos^{366}(F(x) - F(1))}{\cos^{366}(G(x) - G(1))} = f(x)?$$

   Řádně zdůvodněte. $(1,5$ bodu).